

拱轴弹性压缩对提篮桁拱的内力影响

姚 安 林

(西南石油学院)

提 要

本文根据提篮桁拱所承受的竖向恒载的实际情况，讨论了拱轴弹性压缩对提篮桁拱内力的影响，并推导出拱轴弹性压缩在弹性中心处引起的附加拉力的计算公式。为应用方便，还给出了有关公式的一个对应数表。

前 言

作为提篮半穿式管桥的承重结构的提篮桁拱^[1]，受竖向恒载作用产生的轴向压力将引起拱轴线方向的弹性压缩。拱轴的这种变形必然引起提篮桁拱的内力变化^[2]。为了更准确地评估提篮桁拱的内力，从而保证其结构设计的可靠性和合理性，有必要对这一问题进行研究。

由于提篮桁拱的拱轴线近似圆弧线，且在拱轴平面内的截面刚度（不考虑腹杆系剪切变形对截面刚度的影响）沿拱轴线处处相等^[1]，故以下的讨论均按等刚度（面内刚度）圆弧拱考虑。

一、建立计算公式

因为提篮桁拱由轴向压力引起的弹性压缩往往表现为拱轴长度的缩短，于是在切开拱顶而得的悬臂曲梁这对基本结构上，拱轴必产生一跨径方向的缩短 ΔL （图1），但在实际结构中，拱顶并没有相对水平位移，显然在弹性中心处必有一水平赘余拉力 E_v 的作用，从而使拱顶相对水平位移为零。这个赘余拉力 E_v 就是拱轴弹性压缩引起的附加力，可根据拱顶的变形协调条件求解^[2]，即

$$\delta'_{22}E_v + \Delta L = 0$$

或

$$E_v = -\frac{\Delta L}{\delta'_{22}} \quad (1)$$

在拱轴上取出一微段 ds （图2）， ds 微段在轴向压力 N 作用下缩短 Δds ，其水平位移分量为 $\Delta ds \cdot \cos\varphi$ ，则弹性压缩导致拱顶的相对水平位移为

$$\Delta L = -2 \int_0^{\varphi_o} \Delta \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \quad (2)$$

由Hooke's定律得

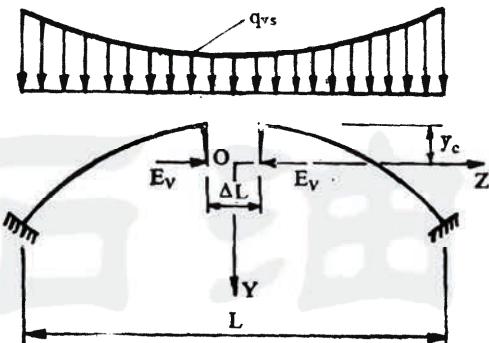


图 1

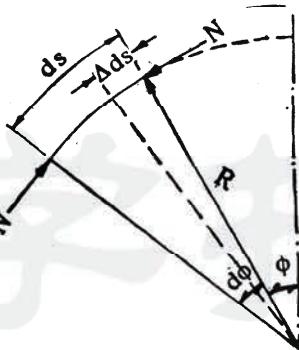


图 2

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EA} \quad (3)$$

式中 N ——未计人弹性压缩影响时拱轴上的轴向压力；

E ——材料的拉压弹性模量；

A ——提篮桁拱的截面积。

一般情况下，提篮桁拱主要承受对称分布荷载，因此拱轴上的轴向压力可按下式确定

$$N = X_2 \cos \varphi + N_s \quad (4)$$

其中 X_2 为不考虑弹性压缩影响时弹性中心处的赘余水平推力，它与拱轴坐标线性无关； N_s 是竖向恒载在基本结构上产生的轴向压力，它是拱轴坐标的函数。

N 沿拱轴方向的变化规律可根据作用在提篮桁拱上的竖向恒载模式建立。从参考文献 [1] 可知，提篮桁拱承受提篮半穿式管桥的全部荷载，其中竖向恒载主要包括提篮桁拱的自重及输物管的自重和输送介质的重量。竖向恒载的后两项是沿跨度方向的均布荷载，而提篮桁拱的自重沿跨度方向或拱轴线方向均是变化的。这里主要讨论由提篮桁拱自重荷载引起的拱轴弹性压缩所产生的附加内力。至于沿跨度方向的均布荷载或沿拱轴线方向的均布荷载（组合拱式管桥和单管拱桥的竖向恒载便属此类）引起拱轴弹性压缩而产生的附加内力的计算公式可如法导出。

由提篮桁拱的构造型式可知，其自重主要包括弦管和腹杆的重量。因为提篮桁拱在理论上可处理成变截面“薄壁箱梁”^[3]（图 3），所以它在轴线方向上的线荷载可表示为

$$q_{v4} = \gamma [2\delta_3 h / \sin \beta + S_1 \delta_1 + S_2 \delta_2] \quad (5)$$

式中 γ ——钢材的重度；

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ——分别为提篮桁拱断面上底边、下底边和腰边的“拟腹板”厚度；

其余符号意义如图 3 所示。

从提篮桁拱的构造设计可知，“薄壁箱梁”的“拟腹板”厚度^[1, 3]在拱顶处最大。考虑安全起见，可取拱顶处“箱梁”断面中较大的“拟腹板”厚度 δ 来计算自重荷载，则

$$q_{v4} = \gamma \delta (2h / \sin \beta + S_1 + S_2) \quad (6)$$

参考文献 [4] 已导出：

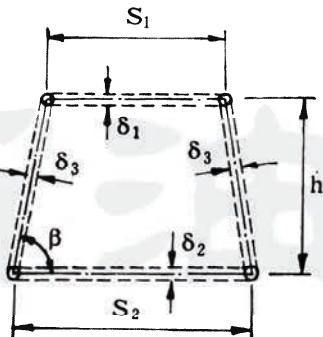


图 3

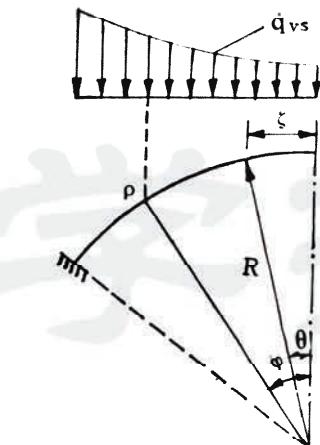


图 4

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2x - \frac{1}{2}(S_{2d} - S_{1d}) \\ S_2 &= 2x + \frac{1}{2}(S_{2d} - S_{1d}) \\ x &= \frac{R}{2f}(1 - \cos\varphi)(a - b) + \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 a 、 b ——分别为两圆弧桁架(拱肋片)轴线在拱脚和拱顶的水平间距;

R ——提篮桁拱轴线的圆弧半径;

f ——提篮桁拱轴线的矢高;

φ ——拱轴线上任意点到拱顶弧段所对应的圆心角;

S_{1d} 、 S_{2d} ——分别为拱顶截面上弦管间距和下弦管间距。

将(7)式代入(6)式得

$$q_{vd} = \gamma \delta (2h / \sin \beta + 2b) \left[1 + \frac{R(a-b)}{(h/\sin \beta + b)f} (1 - \cos \varphi) \right] \quad (8)$$

注意到当 $\varphi = 0$ 时, 上式即为拱顶处的自重荷载, 即 $q_{vd}|_{\varphi=0} = q_d$ 。

于是

$$q_{vd} = q_d [1 + u(1 - \cos \varphi)] \quad (9)$$

其中

$$u = \frac{R(a-b)\sin \beta}{(h+b\sin \beta)f} \quad (10)$$

q_d 按实际情况计算或按“薄壁箱梁”的“拟腹板”厚度计算均可。

将(9)式表示的沿拱轴线方向的分布荷载化成沿跨度方向的分布荷载, 则有

$$q_{v,s} = q_d [\sec \varphi + u(\sec \varphi - 1)] \quad (11)$$

竖向恒载 $q_{v,s}$ 在基本结构任意点处产生的轴向压力 N_v 可通过悬臂梁求内力的方法求得。

图4所示悬臂曲梁在荷载 $q_{v,s}$ 作用下, 任意截面 ρ 上的竖向内力为

$$F = \int_0^\varphi q_{v,s} d\zeta \quad (12)$$

将(11)式及 $d\zeta = R \cos \theta d\theta$ 代入上式得

$$F = q_d R [(1+u) \varphi - u \sin \varphi] \quad (13)$$

于是，该截面上的轴向压力为

$$N_s = q_d R [(1+u) \varphi - u \sin \varphi] \sin \varphi \quad (14)$$

将上式代回(4)式可得拱轴上的轴向压力

$$N = x_2 \cos \varphi + q_d R [(1+u) \varphi - u \sin \varphi] \sin \varphi \quad (15)$$

将(15)式代回(3)式和(2)式中，通过积分整理便得到拱轴弹性压缩在拱顶引起的相对水平位移

$$\Delta L = - \left[\frac{X_2}{EA} R t_1 + \frac{2q_d}{EA} R^2 (t_2 + u t_3) \right] \quad (16)$$

其中

$$t_1 = \varphi_o + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_o \quad (17)$$

$$t_2 = \frac{1}{4} (2\varphi_o \sin^2 \varphi_o + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_o - \varphi_o) \quad (18)$$

$$t_3 = t_2 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_o \quad (19)$$

这里 φ_o 是拱脚到拱顶弧段所对应的圆心角。

由作用在弹性中心处的单位水平拉力 ($E_s = 1$ 时) 产生的拱顶相对水平位移为

$$\delta'_{22} = \int_s \frac{\tilde{M}_2^2}{EI_x} ds + \int_s \frac{\tilde{N}_2^2}{EA} ds \quad (20)$$

因为管桥中的提篮桁拱大都 $f/L < \frac{1}{5}$ ，故计入单位轴力的影响。根据无铰拱内力正向的常用规定^[5]可知

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{M}_2 = -y \\ \tilde{N}_2 = -\cos \varphi \end{array} \right\} \quad (21)$$

从图 1 所示坐标关系看出，弹性中心的主轴坐标可表示成

$$y = R \left(\frac{\sin \varphi_o}{\varphi_o} - \cos \varphi \right) \quad (22)$$

将(21)、(22)两式同时代回(20)式，积分整理后得

$$\delta'_{22} = 2R \left(\frac{R^2}{EI_x} t_4 + \frac{1}{2EA} t_1 \right) \quad (23)$$

其中

$$t_4 = \frac{1}{2} t_1 - \frac{\sin^2 \varphi_o}{\varphi_o} \quad (24)$$

I_x ——提篮桁拱截面竖向抗弯惯矩；

将(16)、(23)两式结果同时代回(1)式，即得弹性压缩产生的附加拉力

$$E_v = \frac{X_2 t_1 + 2q_d R (t_2 + u t_3)}{2R^2 \left(\frac{A}{I_x} \right) t_4 + t_1} \quad (25)$$

如果提篮桁拱的弦管规格相同(图 5)，

则有^[1]

$$I_x = \frac{1}{4} Ah^3 \quad (26)$$

$$\text{于是 } E_v = \frac{[X_2 t_1 + 2q_d R(t_2 + ut_3)]h^2}{8R^2 t_4 + h^2 t_1} \quad (27)$$

式中各符号意义同前。

为了进一步简化(27)式,下面来推导不考虑弹性压缩影响时分布荷载 q_{vz} 在弹性中心处引起的赘余水平推力 X_2 。

根据无铰拱内力计算的基本原理^[5], X_2 可由典型力法方程求得:

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2q} = 0 \quad (28)$$

如图4所示,竖向分布荷载在拱轴任意点 ρ 产生的弯矩

$$M_{vz} = - \int_0^\varphi q_{vz} (R \sin \varphi - R \sin \theta) d\zeta \quad (29)$$

将

$$d\zeta = R \cos \theta d\theta$$

及用 θ 替换 φ 以后的(11)式代入上式,整理后得

$$M_{vz} = -q_d R^2 \left[(1+u)(\varphi \sin \varphi - 1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2} u \sin^2 \varphi \right] \quad (30)$$

弹性中心处的单位水平推力($X_2=1$ 时)在拱轴任意点 ρ 产生的弯矩

$$\bar{M}_2 = \left(\frac{\sin \varphi_o}{\varphi_o} - \cos \varphi \right) R \quad (31)$$

于是,将(30)和(31)两式代入莫尔积分公式,整理后得到

$$EI_x \Delta_{2q} = -2q_d R^4 (t_5 + ut_7) \quad (32)$$

其中 $t_5 = \left(\frac{2}{\varphi_o} - \frac{\varphi_o}{2} \right) \sin^2 \varphi_o - \frac{7}{4} \sin \varphi_o \cos \varphi_o - \frac{1}{4} \varphi_o \quad (33)$

$$t_7 = t_5 - t_6 \quad (34)$$

$$t_6 = \frac{1}{4} \sin \varphi_o - \frac{\sin^2 \varphi_o \cos \varphi_o}{4 \varphi_o} - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi_o \quad (35)$$

参考(23)式可得

$$\delta_{22} = \frac{2R^3}{EI_x} t_4 + \frac{R}{EA} t_1 \quad (36)$$

将(32)及(36)两式代回方程(28)中,则得竖向荷载 q_{vz} 在弹性中心处引起的赘余水平推力

$$X_2 = \frac{8R^2(t_5 + ut_7)}{8R^2 t_4 + h^2 t_1} q_d R \quad (37)$$

将上式代入(27)式化简整理后得

$$E_v = \frac{[R^2(C_1 + uC_2) + h^2(C_3 + uC_4)]h^2}{(8R^2 t_4 + h^2 t_1)^2} q_d R \quad (38)$$

其中

$$C_1 = 8(t_1 t_5 + 2t_2 t_4) \quad (39)$$

$$C_2 = 8(t_1 t_7 + 2t_3 t_4) \quad (40)$$

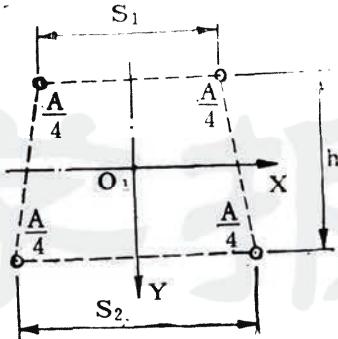


图 5

$$C_3 = 2t_1 t_2 \quad (41)$$

$$C_4 = 2t_1 t_3 \quad (42)$$

按上述方法，同理可导出沿跨度方向的均布荷载或沿拱轴线方向的均布荷载作用下，拱轴弹性压缩在弹性中心处产生的附加力的计算公式分别为

$$E_{us} = \frac{[R^2 C_5 + h^2 C_6] h^2}{(8R^2 t_4 + h^2 t_1)^2} q_{us} R \quad (43)$$

和

$$E_{ua} = \frac{\left[\frac{1}{4} R^2 (A/I_x) C_1 + C_3 \right]}{[2R^2 (A/I_x) t_4 + t_1]^2} q_{ua} R \quad (44)$$

以上两式中

$$C_5 = 8t_1 t_6 + \frac{16}{3} t_4 \sin^3 \varphi_o \quad (45)$$

$$C_6 = \frac{2}{3} t_1 \sin^3 \varphi_o \quad (46)$$

q_{us} ——沿跨度方向的均布荷载；

q_{ua} ——沿拱轴线方向的均布荷载；

为了设计应用方便，作者根据不同的矢跨比已将公式 (17)、(18)、(19)、(24)、(33)、(34)、(35)、(39)、(40)、(41)、(42)、(45)、(46) 等代表的有关参数编成计算机程序，得到各种参数的系列值，见附表。

这样，考虑了拱轴弹性压缩的影响后，提篮桁拱的竖向恒载内力分别为
轴向压力 $N(\varphi) = (X_2 - E_q) \cos \varphi - X_3 \sin \varphi + N_q$ (47)

弯 矩 $M(\varphi) = X_1 + (X_2 - E_q) \left(\frac{\sin \varphi_o}{\varphi_o} - \cos \varphi \right) R - X_3 R \sin \varphi + M_q$ (48)

剪 力 $Q(\varphi) = -(X_2 - E_q) \sin \varphi + X_3 \cos \varphi + Q_q$ (49)

(47)~(49) 式中

E_q ——竖向恒载作用下拱轴弹性压缩在弹性中心处产生的附加水平拉力，根据具体的荷载型式选用相应的公式 ((38)、(43) 或 (44)) 计算；

X_1 、 X_2 ——分别为不考虑拱轴弹性压缩影响时竖向恒载在弹性中心处产生的赘余弯矩和剪力。

N_q 、 M_q 、 Q_q ——分别为竖向恒载作用在基本结构上产生的轴向压力、弯矩和剪力。

二、算例和讨论

下面以参考文献 [1] 的设计方案为例来讨论考虑拱轴弹性压缩影响后提篮桁拱的内力。

提篮桁拱承受的竖向恒载包括按 (11) 式规律分布的提篮桁拱自重荷载和沿跨度方向均匀分布的输气管自重荷载两部分。其中

$$q_d = 1773.6 \text{ (N/m)}$$

$$q_{us} = 2499.6 \text{ (N/m)}$$

$$R=202.8 \text{ (m)}$$

$$a=10 \text{ (m)}$$

$$b=1 \text{ (m)}$$

$$h=1.6 \text{ (m)}$$

$$f=15.6 \text{ (m)}$$

$$\beta=1.289958 \text{ (rad)}$$

$$\varphi_0=0.394793 \text{ (rad)}$$

将以上数据代入有关公式算出不计弹性压缩影响时和计入弹性压缩影响时提篮桁拱的内力值如表1所示。

表1 不计弹压和考虑弹压影响的内力对照表

截面位置		拱顶			拱脚		
内力		N (N)	Q (N)	M (N·m)	N (N)	Q (N)	M (N·m)
$q_a=1773.6 \text{ (N/m)}$	不计Eq	506269.1	0	-176172.8	583157.1	83897.7	-785659.2
	计入Eq	491635.5	0	-99984.7	569644.9	89515.4	-936851.3
$q_{us}=2499.6 \text{ (N/m)}$	不计Eq	476672.6	0	2673301.6	514827.9	-3361.1	2507699.7
	计入Eq	462994.8	0	2744513.6	502198.1	1889.5	2366381.9
q_d+q_{us}	不计Eq	982942.1	0	2497128.1	1097984.9	80536.8	1722040.9
	计入Eq	954630.4	0	2644528.9	1071843.3	91405.1	1429530.1
相对变化率 %		-2.9		5.9	-2.4	13.4	-17

从表1的内力对照值可以看出，考虑拱轴弹性压缩的影响后原拱结构各内力的分布情况均起了变化。其中沿拱轴线的轴向压力都有减小的趋势，拱脚截面的弯矩值也比原来值减小10%以上；相反拱顶截面的弯矩值却有明显增加。表中组合内力的分布情况还表明，在分布荷载 q_d 和均布荷载 q_{us} 同时作用下，拱顶的轴向压力虽比拱脚的小（约小10%），但拱顶弯矩却远大于拱脚弯矩（约大31%）。于是，当只考虑结构受竖向恒载作用时，拱顶截面可能就较拱脚截面危险，而拱轴弹性压缩变形又使拱顶内力弯矩进一步增大，结果加剧了拱顶截面的危险性。由此可见，拱轴弹性压缩的影响将导致提篮桁拱拱顶的危险受力状态。因此，如果在设计时不考虑弹压变形的影响，显然容易留下设计隐患。尤其在采用准则法对结构进行优化设计时更应对这种影响因素予以必要的考虑。

三、结语

本文所探讨的问题是一个在实际应用中容易被忽视的问题。但本文的理论分析和算例均表明，对于弹性较大的钢管桁拱结构来说，拱轴弹性压缩对结构内力分布规律的影响非同小可，而且有可能威胁结构的安全。因此，在结构设计中不可忽视。

（本文收到日期1986年7月10日）

参 考 文 献

- [1] 汤国栋、姚安林：提篮半穿式管桥的构思与设计，《油气储运》，4(3)，1985，6-12
- [2] 同济大学等合编：桥梁工程（上册），北京，人民交通出版社，1980，209-211
- [3] 李国豪著：桥梁与结构理论研究，上海科学技术文献出版社，1983，139-147
- [4] 姚安林：水平风荷载作用下变截面提篮式无铰拱的内力分析，《油气储运》，3(4)，1984，48-52
- [5] 李鍇锟主编：结构力学，北京，人民教育出版社，1979，194-196

**THE INTERNAL FORCES AFFECTED BY ELASTIC
COMPRESSION OF ARCH AXIS IN THE BASKET-LIKE
TRUSS ARCH**

Yao Anlin

(Southwestern Petroleum Institute)

Abstract

According to the real conditions of vertical dead loads borne by a basket-like truss arch, the internal forces in the basket-like truss arch affected by elastic compression of arch axis are discussed, and some formulas for calculating additional forces caused by that at the elastic center are derived. It is shown from a numerical example, that the elastic compression of arch axis after loaded will change the distributing regular of internal forces along arch axis to a considerable degree. At this, it should be considered by person who will design this structure. A. data table related to some formulas is also given for facilitate application.

(上接第101页)

ranging from 120kg/mm^2 to 190kg/mm^2 . K_{Iscc} greatly increased, while da/dt marked decreased with decreasing tensile strength, when $\sigma_b \leq 135\text{kg/mm}^2$. When $\sigma_b > 140\text{kg/mm}^2$, the change in K_{Iscc} and da/dt is not significant. The safety of bolts with small cracks in threaded roots was discussed. For crack depth of 0.5mm, the tensile strength σ_b of medium carbon low alloy high strength steel, such as 35CrMnSiA, 40CrNiMoA, 40B should be less than or equal to 120kg/mm^2 to keep $K_I < K_{Iscc}$. It was also indicated that disalignment might cause a very high value of stress intensity factor.